<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

03.06.2020 г. – Вариант 2

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Ако $x=\frac{1}{6}$**, а** $y=\frac{5}{6}$**, с колко процента** y **е по-голямо от** x**?**

А) с 500% **Б) с** 400% **В) с** 250% **Г) със** 100%

2. Стойността на израза $\sqrt{6^2+12^2}-\sqrt{125}+\sqrt{20}$ **е:**

А) $18-3\sqrt{5}$ **Б)** $5\sqrt{3}$ **В)** 7 **Г)** $3\sqrt{5}$

3. Кое от числата НЕ е допустима стойност на израза $A=\sqrt{\frac{3-x}{x^2+4}}$ **?**

А) -2 **Б)** $-(-1)^3$ **В)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ **Г)** -3^{-4}

4. Множеството от решения на неравенството $\frac{(x-2)(x-4)^2}{x+\sqrt{2}}\le 0$ **е:**

А) $\left(-\sqrt{2};2\right]$ **Б)** $\left(-\sqrt{2};2\right]\cup\{4\}$ **В)** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup[2;4]$ **Г)** $\left(-\sqrt{2};2\right]\cup[4;+\infty)$

5. Сравнете числата $a=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$, $b=1$ **и** $c=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$**.**

А) $a<b<c$ **Б)** $b<c<a$ **В)** $c<a<b$ **Г)** $a<c<b$

6. Броят на различните наредени двойки $(x;y)$, които са решения на системата

$$\begin{vmatrix} y = x^2 + 3x + 1 \\ y = 2x^2 - 5x + 17 \end{vmatrix}$$ **, е:**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4

7. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x - \dfrac{22}{x} = 9$, то $x_1 + x_2$ е равно на:

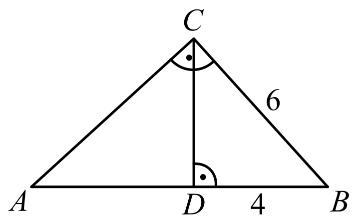
А) -22 **Б)** -9 **В)** 9 **Г)** 22

8. Ако $\operatorname{tg}\alpha = 2\dfrac{2}{5}$, $\alpha \in (0°;90°)$, то стойността на $\sin\alpha$ е:

А) $\dfrac{12}{13}$ **Б)** $\dfrac{7}{12}$ **В)** $\dfrac{5}{12}$ **Г)** $\dfrac{5}{13}$

9. Отсечката CD е височина в правоъгълния $\triangle ABC$. Катетът BC = 6 cm и BD = 4 cm. Дължината на отсечката AD е:

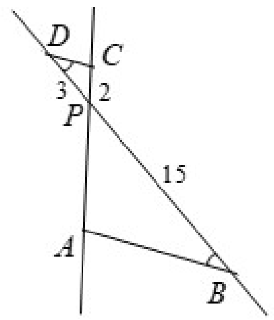
А) $5\sqrt{2}$ cm **Б)** 6,5 cm **В)** 6 cm **Г)** 5 cm



10. На чертежа правите AC и BD се пресичат в точка P, като $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CDP$. Ако $CP = 2$ cm, $DP = 3$ cm и $BP = 15$ cm, то дължината на отсечката AC е:

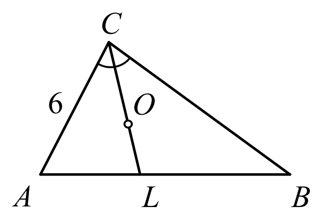
А) 7,5 cm **Б)** 10 cm

В) 12 cm **Г)** 24,5 cm



11. В $\triangle ABC$ отсечката CL $(L \in AB)$ е ъглополовяща, точката O е центърът на вписаната окръжност, $AC = 6$ cm и $CO : OL = BL : AL = 3 : 2$. Периметърът на $\triangle ABC$ е:

А) 20 cm **Б)** 22 cm **В)** 24 cm **Г)** 25 cm



12. Ординатите на пресечните точки на параболата $y=-x^2+2x+4$ **с ъглополовящата на втори и четвърти квадрант са**:

А) -1 **и** 4 **Б)** -4 **и** 1 **В)** -1 **и** 1 **Г)** -4 **и** 4

13. Числовата редица $\{a_n\}$ **е определена по следния начин** $a_1=-2,\ a_2=1$ **и** $a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}$ **за всяко естествено число** $n\geq 3$. **Намерете** a_5**:**

А) -5 **Б)** -1 **В)** 1 **Г)** 5

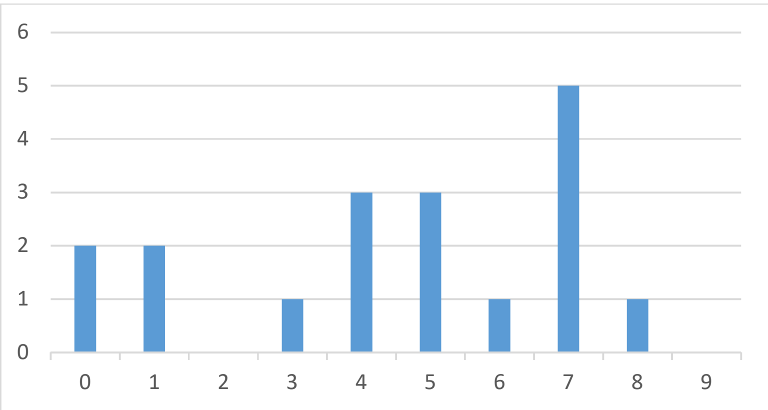
14. За крайна геометрична прогресия е дадено, че $a_1=2$**,** $q=3$ **и сборът от членовете ѝ е** $S_n=242$. **Броят** n **на членовете на прогресията е:**

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7

15. Стойността на израза $\operatorname{tg}(\alpha+15°).\cos 2\alpha+\operatorname{cotg}(\alpha-60°).\sin 2\alpha$ **при** $\alpha=30°$ **е:**

А) -1 **Б)** 0 **В)** $\frac{1}{6}$ **Г)** 2

16. На диаграмата е представена честотата на срещане на цифрите на числата 445, 655, 341**,** 100**,** 777 **и на още едно трицифрено число.**



Това число може да е:

А) 707 **Б)** 751 **В)** 861 **Г)** 877

17. Редът, чиято мода е 1**, а медианата му е** 2,5 **е:**

А) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 9, 11 **Б)** 0, 1, 2, 2, 3, 4, 9, 11

В) 0, 0, 1, 2, 3, 6, 9, 11 **Г)** 0, 0, 1, 1, 1, 6, 9, 11

18. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle BAC = 45°$ **и** $\sphericalangle ABC = 30°$**. Отношението** $BC : AC$ **е:**

А) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ **Б)** $2 : \sqrt{3}$ **В)** $\sqrt{2} : 1$ **Г)** $\sqrt{3} : 1$

19. В $\triangle ABC$ $AC = 5$ cm, $BC = 3$ cm, **точката** M **е средата на** AB **и** $CM = 2\sqrt{2}$ cm. **Дължината на страната** AB **е:**

А) 4 cm **Б)** 5 cm **В)** 6 cm **Г)** 7 cm

20. Лицето на успоредник със страни 2 cm **и** 3 cm **е** $3\sqrt{3}$ cm^2**. Дължината на по-големия диагонал на успоредника е:**

А) $\sqrt{7}$ cm **Б)** $2\sqrt{3}$ cm **В)** 4 cm **Г)** $\sqrt{19}$ cm

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

03.06.2020 г. – Вариант 2

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. **Пресметнете стойността на израза** $A=6^{1-\log_6\sqrt{3}}.\sqrt{\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}}$ **.**

22. Намерете решенията на неравенството $\left(x^2-5x+6\right)\left(-x^2-x+6\right)\le 0$ **.**

23. Частното на членовете a_9 **и** a_2 **на една аритметична прогресия е равно на** 5**, а при деление на** a_{13} **с** a_6 **се получава частно** 2 **и остатък** 5**. Намерете първия член и разликата на тази аритметична прогресия**.

24. На класна работа по математика учениците от 12а клас, които са 26**, имат среден успех добър** $(4{,}30)$**, а учениците от 12б клас, които са** 24**, имат среден успех много добър** $(5{,}30)$**. Колко е средният успех общо на учениците от 12а и 12б класове на тази класна работа?**

25. В $\triangle ABC$ **отсечките** $AM=6$ cm **и** $BN=9$ cm **са медиани,** G **е общата им точка, а лицето на четириъгълника** $CNGM$ **е** 8 **cm²**. **Намерете** $\sin\sphericalangle MGN$ **.**

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. **Решете уравнението и намерете сбора от корените му** $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=\dfrac{5}{2}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ **.**

27. Решете системата $\left|\begin{array}{l} x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \\ x^2+xy=y+1 \end{array}\right.$ **.**

28. Бедрото BC **на трапеца** $ABCD$ **има дължина** $2\left(\sqrt{3}+1\right)$**. Ако** $\sphericalangle BAD=75°,\ \sphericalangle ABC=45°$ **и в трапеца може да се впише окръжност, да се намери височината на трапеца и да се докаже , че лицето му е** $S_{ABCD}=\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2$ **.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\frac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\frac{V_n^k}{P_k}=\frac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $\quad S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad a^2 = a_1 c$ $\quad b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $\quad r = \frac{a+b-c}{2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) \quad m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) \quad m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $\quad l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $\quad S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $\quad S = ab\sin\alpha$ $\quad$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

03.06.2020 г. – Вариант 2

№ на задача	Верен отговор	Брой точки
1	Б	2
2	Г	2
3	В	2
4	Б	2
5	А	2
6	Б	2
7	В	2
8	А	2
9	Г	2
10	В	2
11	Г	3
12	Б	3
13	А	3
14	Б	3
15	А	3
16	Г	3
17	А	3
18	В	3
19	В	3
20	Г	3
21	$A=6$	4
22	$x\in(-\infty;-3]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$	4
23	$a_1=3;\ d=4$	4
24	4,78	4

25	$\sin\sphericalangle MGN=\dfrac{2}{3}$	**4**
26	-1	**10**
27	$(1;\,-1)$ **и** $(1;\,1)$	**10**
28	$\sqrt{6}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	**10**

Задача 26.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението

Решаваме уравнението $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=\dfrac{5}{2}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

Полагаме $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=u,\ u>0$	**2 точки**
Достигане до квадратното уравнение $u=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{u}\Leftrightarrow 2u^2-5u+2=0$	**1 точка**
За намиране на корените $u_1=2,\ u_2=\dfrac{1}{2}$ и определяне, че са решения	**2 точки**
Решаване на уравнението $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=2,\ \ x=2$ и установяване, че е решение	**2 точки**
Решаване на уравнението $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=\dfrac{1}{2},\ x=-3$ и установяване, че е решение	**2 точки**
Сборът на двата корена е $2-3=-1$	**1 точка**

Забележка: Ако дефиниционното множество е намерено предварително, то проверката може да се прави и в дефиниционното множество на уравнението.

Задача 27.

Решение: При $x\neq 0$, $y\neq 0$ уравнението $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ е еквивалентно на

$(x+y)xy=x+y\ \Leftrightarrow\ (x+y)xy-(x+y)=0\ \Leftrightarrow\ (x+y)(xy-1)=0\ \Leftrightarrow\ x+y=0$ или $xy-1=0.$

Тогава дадената система е равносилна на обединението на системите

$$(1)\ \left|\begin{array}{l}x+y=0\\ x^2+xy=y+1\end{array}\right.\quad \text{или}\quad \left|\begin{array}{l}xy-1=0\\ x^2+xy=y+1\end{array}\right.\ (2).$$

Решаваме (1): $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1,\ y=-1$.

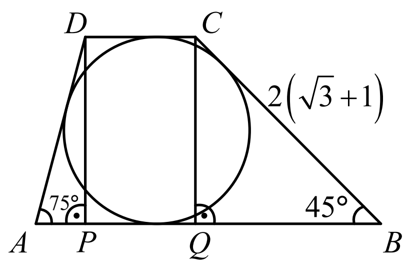
Решаваме (2): $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+xy=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ x^2+1=\dfrac{1}{x}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ x^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1,\ y=1$.

Следователно системата има две решения – двойките числа $(1;\,-1)$ и $(1;\,1)$.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Определяне на $x\neq 0$, $y\neq 0$	**1 точка**
Преобразуване на уравнението $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ до получаване на $x+y=0$ или $xy-1=0$	**3 точки**
Решаване на системата $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy=y+1 \end{cases}$	**2 точки**
Решаване на системата $\begin{cases} xy-1=0 \\ x^2+xy=y+1 \end{cases}$	**3 точки**
Записване на двойките решения $(1;\,-1)$ и $(1;\,1)$.	**1 точка**

Задача 28



Решение: Построяваме височините CQ и DP. От $\triangle BQC$ намираме, че $CQ=BC.\sin 45^\circ=2\left(\sqrt{3}+1\right).\dfrac{\sqrt{2}}{2}=$

$=\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

От $\triangle APD$ получаваме, че

$$\frac{DP}{AD}=\sin 75^\circ \Leftrightarrow AD=\frac{DP}{\sin 75^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 75^\circ}.$$

Пресмятаме $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ.\cos 30^\circ+\cos 45^\circ.\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Намираме $AD = \dfrac{DP}{\sin 75^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 75^\circ} = 4$.От условието, че трапецът е описан около окръжност следва, че $AB + CD = BC + AD$ т.е. $AB + CD = 2\sqrt{3} + 2 + 4 = 2\sqrt{3} + 6$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right).CQ = \left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

За чертеж на трапеца с построени височини	**1 точка**
За намиране на $CQ = BC.\sin 45^\circ$	**1 точка**
За окончателно пресмятане на $CQ = \left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$	**1 точка**
За изразяване на $\dfrac{DP}{AD} = \sin 75^\circ$	**1 точка**
За намиране на $\sin 75^\circ$ $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ.\cos 30^\circ + \cos 45^\circ.\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	**2 точки**
За намиране на $AB + CD = BC + AD$	**1 точка**
За намиране на $AB + CD = 2\sqrt{3} + 2 + 4 = 2\sqrt{3} + 6$	**1 точка**
За изразяване на $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\left(AB + CD\right).CQ = \left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) =$ $= \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2$	**2 точки**

Забележка: Ако е изразено лицето чрез $\sin 75^\circ$ без да бъде пресметнато в писмената работа, да се оценява задачата с общо 8 точки.